

8-9 класс. Комбинаторика-2. (С УКАЗАНИЯМИ)

I. ПРОЦЕССЫ И ОПЕРАЦИИ.

- На чудо-дереве растут яблоки и апельсины. Изначально было 10 яблок и 10 апельсинов. Если сорвать два одинаковых фрукта, то вырастет один апельсин, а если два разных — то яблоко. Так продолжается, пока на дереве ни останется один фрукт. Что это за фрукт?

Подсказка: Последите за четностью количества фруктов.

- На острове Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно перекрашиваются в третий цвет. Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Источник: Турнир городов.

Подсказка: Как изменяется разность между количествами хамелеонов двух разных цветов?

- В таблице 10×10 расставлены числа. За одну операцию можно поменять знаки в любой строке или любом столбце. Всегда ли можно получить таблицу, у которой в любой строке и в любом столбце сумма неотрицательна?

Источник: «Квант».

Подсказка: Можно проводить лишь операции, увеличивающие общую сумму. Почему такие операции в конце концов приведут к нужной таблице?

- Горизонтали и вертикали шахматной доски занумерованы числами от 1 до 8. В клетке (i, j) написали число $\frac{1}{i + j - 1}$. На доску поставили 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что сумма чисел в клетках, на которых находятся ладьи, не меньше 1.

Источник: Турнир городов.

Подсказка: Есть частный случай, когда сумма равна 1. Придумайте операции (не меняющие условий задачи), которые не увеличивают сумму чисел под ладьями и в конечном итоге приводят к «хорошему» частному случаю.

- (С) Имеется 2017 ящиков, содержащих соответственно 1, 2, 3, ..., 2017 камней. За один шаг разрешено выбросить из любого множества ящиков по одинаковому числу камней. За какое наименьшее число шагов можно выбросить все камни?

Источник: Всесоюзная олимпиада 1990 г.

Подсказка: За одну операцию «разнообразие» уменьшается не более чем вдвое. (Под «разнообразием» мы здесь понимаем число ящиков с попарно различными количествами камней).

- В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Каждую минуту Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх независимо от того, как Петя выбирает пачки.

Источник: Турнир городов.

Подсказка: Последие за верхней картой и примените индукцию. Или найдите полуинвариант!

II. РЕКУРСИЯ И ИНДУКЦИЯ.

- Можно ли квадрат разрезать на 2018 квадратов?

Подсказка: Из разбиения на n квадратов очень легко получить разбиение на $n + 3$ квадрата.

- Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.

Источник: Региональный этап Всероссийской олимпиады 2017 г.

Подсказка: Без индукции грустно... А с ней легко!

3. Докажите, что у числа $2^{2^n} - 1$ не меньше, чем n различных простых делителей.

Подсказка: Это разность квадратов.

4. (С) Известно, что число $x + \frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что для любого натурального n число $x^n + \frac{1}{x^n}$ также целое.

Подсказка: Положим $A_n = x^n + \frac{1}{x^n}$. Как A_n выразить через A_k с индексами $k < n$?

5. (С) В компании из 50 человек у каждого появилась новость, известная только ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за 96 разговоров все они могут узнать все новости.

Подсказка: Пусть у Вас имеется быстрый алгоритм распространения сплетен для k людей. Как применить его, если у нас $k + 1$ человек?

Ссылки по теме

[1.] А. Канель-Белов, А. Ковалъджи. Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2008 .
(<https://www.mccme.ru/free-books/olymp/KanKov.pdf>)

[2.] Л. Курляндчик, Д. Фомин. Этюды о полуинварианте. «Квант» №7, 1989 г.

[3.] Ю. Ионин, Л. Курляндчик. Поиск инварианта. «Квант» №2, 1976 г.

[4.] П. Кожевников. Счетчики и расстояния в графах. «Квант» №6, 2017 г.